高数复习与 CMC 备考

董思言

本文主要为梳理巩固高数知识，借此机会，备考大学生数学竞赛；

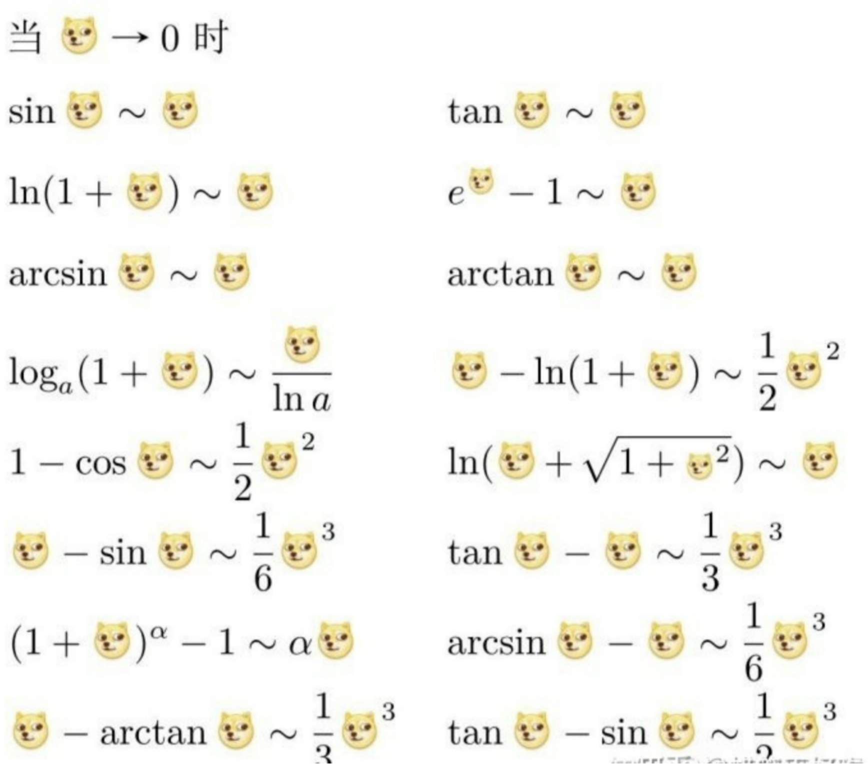
第 1 章　极限与导数

1.1　知识点梳理

- 数列 — 放缩、夹逼
- 等价无穷小、Taylor 展开、重要极限、黎曼和（积分定义）
- 含积分—积分中值、洛必达

1.2　无穷小替换

注意用的场合（乘法）一般加法不适用；其次注意精度



1.3　导数相关

倒数定义（左右导数类似）：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

函数：可微是可导的充要条件，可导连续，连续不一定可导。
导数运算关系略，注意常见的导数运算，如：sec、arctan、sinh...
链式法则：$y = f(\varphi(x))$

$$y' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \tag{1.2}$$

隐函数导数求法：

- 方程两边对 x 求导，y(x); 对 x 求导应按复合函数链式法则做.
- $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$,
- 利用微分形式不变性

高阶导数（莱布尼茨公式）：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} c_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}, \text{其中} u^{(0)} = u, v^{(0)} = v \tag{1.3}$$

1.4 重要定理

1.4.1 拉格朗日中值定理

设函数 f(x) 满足条件：(1) 在 [a,b] 上连续；(2) 在 (a,b) 内可导；

$$\text{则在}(a,b)\text{内一存在个}\xi, \text{使}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \tag{1.4}$$

1.4.2 柯西中值定理

设函数 f(x), g(x) 满足条件：(1) 在 [a,b] 上连续；(2) 在 (a,b) 内可导且 $f(x)$, g'(x) 均存在，且 g′(x) 不等于 0:

$$\text{则在}(a,b)\text{内存在一个}\xi, \text{使}\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{1.5}$$

1.4.3 洛必达法则

处理 $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ 一直导就好。

1.4.4 泰勒公式与麦克劳林公式

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，则对该邻域内异于 x_0 的任意点 x, 在 x_0 与 x 之间至少存在一个 ξ,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{1.6}$$

$$\text{其中}R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{称为}f(x)\text{在点}x_0\text{处的}n\text{阶泰勒余项。}$$

let $x_0 = 0$,n 阶泰勒公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x) \tag{1.7}$$

其中$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ξ 在 0 与 x 之间，(1-7) 式称为麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\xi + \frac{n+1}{2}\pi)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

1.5 其他细节知识

单调性与导数关系、渐近线求法、凹凸性判定（拐点）；
弧微分：

$$dS = \sqrt{1+y'^2}dx \tag{1.8}$$

曲率：曲线 $y = f(x)$ 在点 (x, y) 处曲率的计算公式为 (曲率半径就是倒数)：

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.9}$$

1.6 泛函与其他算符

- 方向导数衡量的是在多维空间中，函数在某一点沿着特定方向的变化率。如果 ∇f 是函数 f 的梯度，那么 f 在 a 点沿着单位向量 u 的方向导数可以表示为

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$$

- 梯度：矢量，方向导数变化最快的方向，即为梯度方向，此时的方向导数的大小，即为梯度的模。

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

- 散度：标量，是一个数值，表示空间各点矢量场发散的强弱程度。散度是衡量矢量场的，输入为矢量场（通常为梯度场）。

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \quad \text{其中}\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

- 旋度

$$rotA = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

- 微分：自变量 x 变化了一点点 (dx), 而导致函数 f(x) 变化了多少

- 差分：离散化的微分, 即 Δx, 当自变量很微小时, 就近似变成了 dx
- 变分: 微分在函数空间上的拓展, 函数关系发生了一点点变化, 引起整体系统 (泛函) 的变化量.

泛函求极值的条件：满足欧拉—拉格朗日方程。通常会涉及偏微分方程 PDE。

1.7 多元函数的微分学

1.7.1 重要定理

链式法则：多元复合函数的导数。
隐函数定理：描述在什么条件下可以从方程 $F(x_1, x_2, \cdot, x_n) = 0$ 隐式地求出某些变量作为其他变量的函数，并求出这些函数的导数。
泰勒公式（Taylor's Theorem）：函数在某点附近的近似表示。
极值定理：描述函数如何在某点取局部极大值或极小值。
拉格朗日乘数法（Lagrange Multipliers）：寻找有约束条件下函数的极值。

1.7.2 全微分

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}|_{x_0,y_0} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}|_{x_0,y_0} \cdot \Delta y + \circ(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

同样我们也可以将其表示为:

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$$

第 2 章 积分相关

2.1 公式定理

2.1.1 牛顿-莱布尼次公式

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.1}$$

2.1.2 格林公式

$$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_{L^+} Pdx + Qdy \tag{2.2}$$

注意方向;

2.1.3 高斯公式

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv &= \oint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ \iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dv &= \oint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds \end{aligned} \tag{2.3}$$

格林公式表达了平面闭区域上的二重积分 (面积) 与其边界曲线上的曲线积分 (线) 之间的关系.
高斯公式表达了空间闭区域上的三重积分与其边界曲面上的曲面积分之间的关系.

2.1.4 斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz \tag{2.4}$$

简化形式：

$$\iiint_{V}\nabla\cdot\mathbf{F}dV=\oint_{\partial V}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.5}$$

$$\oint_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint_{\Sigma}(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} \tag{2.6}$$

2.2 积分方法

首先应该熟悉定义：黎曼和（分隔、求和、取极限）；
然后是第一类换元法、第二类换元法；
坐标也可以考虑转换，比如极坐标、球坐标等等，注意 Jacobi 行列式（变换系数，类似度规）
分部积分也较为常用：

$$\int\mu\upsilon'dx=\mu\upsilon-\int\mu'\upsilon dx$$

记一下常见的。如：

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

2.3 积分应用

光滑曲面 $S:z=f(x,y),(x,y)\in D$

$$\text{曲面面积公式}A=\iint_{D}\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}d\delta$$

若曲面方程 $F(x,y,z)$=0, 且$F_z\neq0$

$$\text{则曲面面积}A=\iint_{D_{xOy}}\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}dxdy$$

其他：如质心、转动惯量等等，此略

第 3 章 常微分方程

3.1 基本概念

通解（general solution）：一个微分方程的所有解的统一形式。
特解（particular solution）：通解中的任意常数确定后的解。
初始条件/初值条件：已给定的条件，比如“通过定点”。用于确定解的范围。

3.2 解法归纳

3.2.1 可分离变量

$$
\begin{aligned}
&g(y)dy = f(x)dx \\
&\text{分离, 积分} \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx \\
&\mathrm{G}(y) = F(x) + C
\end{aligned}
$$

3.2.2 齐次方程

简而言之，是 $\frac{y}{x}$ 整体出现的。$\Rightarrow y = ux$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

从而消去 $y \Rightarrow$ 可分离变量的微分方程

$$g(u)du = f(x)dx$$

3.2.3 可化为齐次的方程：多出了常数 c

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \\
&\text{令}\begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \end{cases} \\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}\right) \\
&\Rightarrow \text{要求}\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \text{系数行列式:}\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{有唯一解}
\end{aligned}
$$

3.2.4 利用变量代换求微分方程的解

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = f(x,y) \\
&\text{例如}\frac{dy}{dx} = (x+y)^2, \text{则令} x + y = u
\end{aligned}
$$

3.2.5 一阶线性微分方程（齐次/非齐次）

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

一阶：包含 y 的一阶导数 y'

线性：仅有 y、y', 且系数为一次方，不能有 $\sin y$、y^2 等。

$Q(x) \equiv 0$, 齐次 $\Rightarrow$ 可分离变量的微分方程 $\Rightarrow y = Ce^{-}\int P(x)dx$

$Q(x) \not\equiv 0$, 非齐次 $\Rightarrow$ 常数变易法 $y = ue^{-\int P(x)dx}$

$$\Rightarrow y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right) e^{-\int P(x)dx}$$

3.2.6 可降阶的高阶微分方程

1、$y^{(n)} = f(x)$

不断两边积分即可:$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C$

2、$y'' = f(x, y') \rightarrow$ 没有y

令$y' = p$

$\Rightarrow p' = f(x, p)$

$\Rightarrow$ 一阶 (可分离变量的微分方程)

3、$y'' = f(y, y') \rightarrow$ 没有x

令$y' = p$

$\Rightarrow y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy} \cdot p$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{dy} \cdot p = f(y, p)$

$\Rightarrow$ 一阶 (可分离变量的微分方程)

3.2.7 常系数齐次线性方程

1. 二阶齐次 $y'' + py' + qy = 0 \quad \Rightarrow$ 特征方程:$r^2 + pr + q = 0$

$$\begin{cases} \Delta > 0, \text{特征根} r_1 \neq r_2 \\ \Delta = 0, \text{特征根} r_1 = r_2 \\ \Delta < 0, \text{特征根} r = \alpha \pm \beta i \end{cases} \Rightarrow \text{通解} \begin{cases} y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x} \\ y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \end{cases}$$

2、n 阶齐次 $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$
可记作:$L(D)y = 0$
D——微分算子, 例如 y^n 可记 $D^n y$
$L(D)$——微分算子 D 的 n 次多项式

3.2.8 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \tag{3.1}$$

为了解这个方程，此处令 $x = e^t$, 再将自变量 x 换成 t
此时有 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt}$
这里给演示如何求 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 如果要继续往下推导，需要读者自行尝试。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt})}{dx} = \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dt} dx + \frac{1}{x} \cdot d(\frac{dy}{dt})}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d(\frac{dy}{dt})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

此时还有

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt})$$

第 4 章 向量代数与空间解析几何

4.1 数量积，向量积，混合积

数量积就是内乘法，基本性质和规律略；
向量积：

$$\mathbf{a}\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

混合积：$[\mathrm{abc}]=(a\times b)c$

4.2 平面、曲面，空间直线、曲线及其方程

- 平面：点法式、一般式、截距式
- 直线：一般方程-空间直线可看做两平面的交线；对称式 (点向式) 方程；（可化为）参数方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 其中 (x_0,y_0,z_0) 为直线上任意点，$s=(m,n,p)$ 为直线方向向量
- 曲面：旋转曲面、柱面、二次曲面等（常见的熟悉一下）
- 曲线：一般与参数方程

第 5 章 无穷级数

5.1 常数项级数

5.1.1 正项级数

- 根据收敛原则，如果正项级数的部分和数列 Sn 有界，那么正项级数有界
- 比较判别法，对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$， $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 如果从某项起有 un<=vn 成立，那么如果 vn 收敛，则 un 也收敛；un 发散，则 vn 也发散。•
- 比较判别法的极限形式，对于 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$ 如果 A=0, 则 vn 收敛时，un 也收敛；如果 A=+ 无穷，vn 发散时，un 也发散；如果 A= 常数，则两者具备相当的敛散性。
- 比值判别法，给定一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=p$ 如果 p<1, 则原级数收敛，如果 p>1, 则原级数发散。
- 根值判别法，给定一个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a^n}=p$ 如果 p<1, 则原级数收敛，如果 p>1, 则原级数发散

5.1.2 交错级数

这种主要还是忽略掉交错，当成正项级数来求收敛性，如果有
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 这 u_n 单调不增且 $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ 则该级数收敛。

5.1.3 任意项级数

对于任意项级数的判别，其实还是看它的绝对值，正项级数的收敛性，如果它的正项级数收敛，则说这个级数绝对收敛，如果它的正项级数不收敛，但这个级数收敛，则为条件收敛。

5.2 幂级数收敛域的求解总结

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

方法一：幂级数收敛域的求法 $\lim_{n\to+\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = p$ 如果 $p! = 0$, 那么收敛半径 R 为 $\frac{1}{p}$ 如果 $p = 0$, 那么收敛半径 R 为 $+\infty$ 如果 $p = +\infty$, 那么收敛半径 R 为 0 再考虑在 +-R 上的点的收敛情况，这样就可以求出收敛域的范围。
方法二：利用正项级数的比值判别法或者根值判别法，令其 <1, 则收敛时，求 x 的取值范围，然后和方法一类似，考虑在 +-R 上的点的收敛情况，这样就可以求出收敛域的范围。

5.3 幂级数求和函数和展开式的相互转换

（1）已知幂级数求和函数本质上是凑，将幂级数通过求导数或者求积分以及其他等式变换的方法，凑成已经知道的常见展开式子的形式，然后直接写出和函数。但是千万记得在这个过程中，要标注收敛域。
（2）已知和函数求幂级数同样是凑，将和函数通过求导数或者求积分以及其他等式变换的方法，凑成已经知道的常见和函数的形式，然后直接写出展开式，这个过程同样要标注收敛域。下面是常见的几种展开式，一定要背住：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \ (-1 < x < 1)$$

$$\mathrm{os}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \ (-1 < x \le 1)$$

$$a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \ (-1 \le x \le 1)$$

5.4 函数项级数

5.4.1 Cauchy 收敛准则（充要条件）

$$\begin{aligned}&\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}\text{在}I\text{上一致收敛}\\&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N_(\varepsilon)\in N,\ \text{当}m>n>N,\left|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon,\forall x\in I\\&\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N_(\varepsilon)\in N,\ \text{当}n>N,\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon,\forall x\in I\forall p\in N\end{aligned}$$

5.4.2 Weierstrass 判别法（充分条件），也称 M 判别法，优级数判别法 (证明一致收敛优先考虑)

$$|u_n(x)|\leq a_n\text{对}\forall n,\forall x\text{成立且}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛}$$

以下两个判别法用于乘积形式的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$

5.4.3 Dirichlet 判别法（充分条件）

(1)$\{b_n(x)\}$ 关于 n 单调且一致收敛到 0

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和一致有界

5.4.4 Abel 判别法（充分条件）

(1) $\{b_n(x)\}$ 关于 n 单调且一致有界

(2)$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 一致收敛