

波动光学

Siyan Dong

第 1 章 波动相关知识

1.1 基本概念

- 横波与纵波（横波—垂直）以及常见的例子；
- 相干叠加条件：振动方向几乎相同，相位差保持不变；
- 重要参数：角波数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- 群速度 $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ ；相速度 $v_p = \frac{\omega}{k}$

1.2 波动方程

下面给出波动方程的二维和一般形式：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla}^2 \cdot \varphi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

从中可以导出相速度：

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{\varphi} = \pm \frac{v}{k} = \pm v \quad (1.3)$$

$$\pm v = - \frac{(\partial \psi / \partial t)_x}{(\partial \psi / \partial x)_t} \quad (1.4)$$

1.3 常见波的分类

平面波：

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)} \quad (1.5)$$

$$y = A_0 \cos(kx - \omega t) \quad (1.6)$$

球型波：

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cdot e^{i(kx + \omega t)} \quad (1.7)$$

柱面波：

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{\sqrt{r}} \cdot e^{i(kx + \omega t)} \quad (1.8)$$

注：注意以上方程中的符号 $kx - \omega t$ 表示向 x 的正方向进行传播。

第2章 电磁理论与光子理论

2.1 Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \cdot \vec{J} + \epsilon_0 \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \end{cases} \quad (2.1)$$

从这个方程组可以导出不同结论。如光速 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

2.2 能量相关知识

Poynting vector:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.2)$$

辐照度:

$$I \equiv \langle S \rangle_T = \frac{c \epsilon_0}{2} E^2 \quad (2.3)$$

在电磁波中:

$$I = E \times E^* \quad (2.4)$$

还有平方反比定律。

2.3 光子

能量:

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad (2.5)$$

动量:

$$p = \frac{h}{\lambda} = k\hbar \quad (2.6)$$

光的辐射压强:

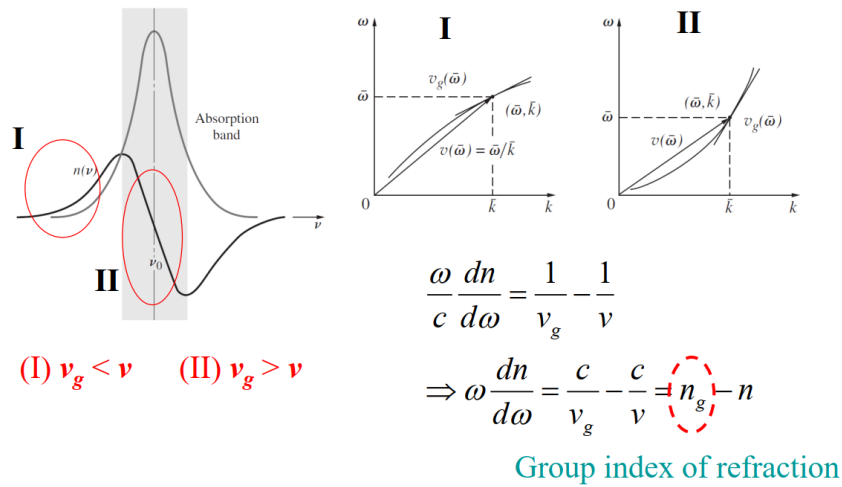
$$\langle P \rangle_T = \frac{I}{c} \quad (2.7)$$

2.4 光的色散现象

原因: 折射率 n 依赖 $f(w)$:

$$n^2(w) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{w_{0j}^2 - w^2 + i\gamma_j w} \quad (2.8)$$

Normal Dispersion & Anomalous Dispersion

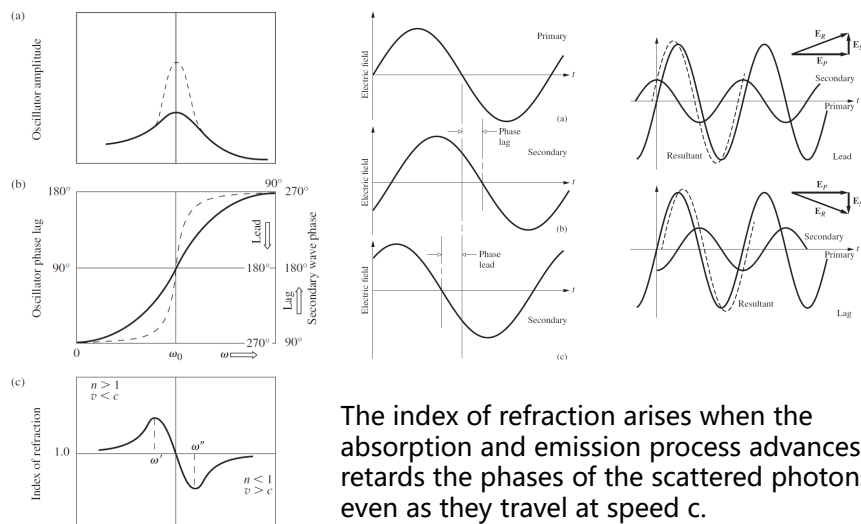


事实上，可以记作： $n = Re + Im * i$ 虚数部分的正负决定吸收或者加强；

第3章 光的传输

3.1 光的折射与折射率模型

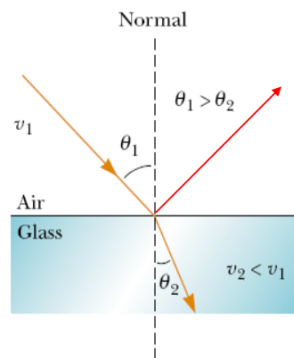
Oscillator phase lag & Index of refraction



Internal and External Reflection

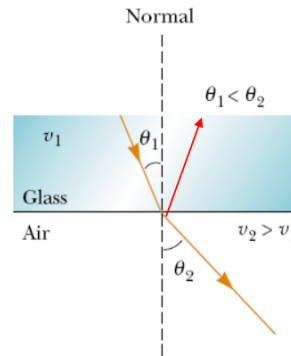
External reflection

$$n_i < n_t$$



Internal reflection

$$n_i > n_t$$



3.2 两个基本原理

3.2.1 Huygen's Principle(Geometric Proof)

- 反射定律: $\theta_i = \theta_r$
- 折射定律: $n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$

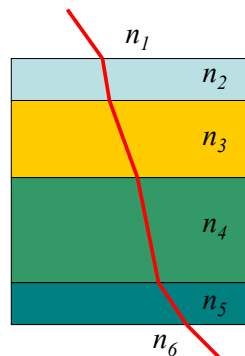
3.2.2 Fermat's Principle(OPL min)

Another statement of Fermat's Principle

Light, in going from point S to P, traverses the route having the smallest optical path length.

$$OPL = \sum n_i s_i = \int_S^P n(s) ds$$

min. traveling time
 $\Updownarrow$ if c is const.
 min. optical path length



3.3 Electromagnetic Approach

3.3.1 边界条件

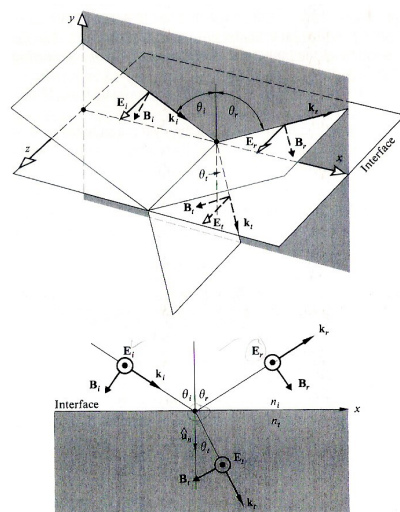
Gauss 环路定理推出，切向 E 、 H 连续；(以下 r-reflection; r-transmission)

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (3.1)$$

3.3.2 Fresnel Equations

The Fresnel Equations

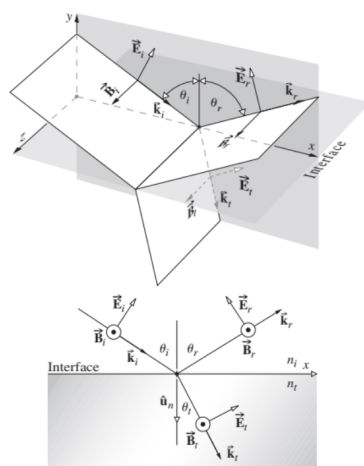
(Linear, isotropic, homogeneous media)



Case 1: $E \perp$ plane-of-incidence

$$r_{\perp} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i - \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}$$

$$t_{\perp} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t}$$



Case 2: $E \parallel$ plane-of-incidence

$$r_{\parallel} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i + \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}$$

$$t_{\parallel} = \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i + \frac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}$$

注意以上推导过程，主要利用 (3.1) 式和 H 的连续性方程。同时注意应用条件—线性、各向同性的均匀介质。

下面考虑： $\mu_0 \approx \mu_i \approx \mu_t$

E 垂直于入射面

$$\begin{aligned}
 r_{\perp} &= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \\
 t_{\perp} &= \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

E 平行于入射面

$$\begin{aligned}
 r_{\parallel} &= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \\
 t_{\parallel} &= \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

以上两式中， r 为 (振幅) 反射系数， t 为透射系数；记住 (3.2) 式，注意 (3.3) 中有 n 与 t 的对调。
其他形式 (仅含角度，便于运算) 结合 Fresnel's Law ($n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t$):

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \tag{3.4}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \tag{3.5}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \tag{3.6}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \tag{3.7}$$

对所有入射角 (θ_i)，均满足以下关系式 (Let $\theta_i = 0$):

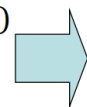
$$(-r_{\perp}) + t_{\perp} = 1 \quad r_{\parallel} + t_{\parallel} = 1 \tag{3.8}$$

偏振角 (Polarization angle): 当 $\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2}$ 时， $r_{\parallel} = 0$ ，此时的角度为 θ_p

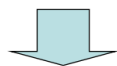
临界角 (Critical angle) 光线从光密介质射向光疏介质 (内反射) 当入射角为某一数值时，折射角等于 90° ，此入射角称临界角 $\theta_c = \arcsin \frac{n_t}{n_i}$ 。

Summary

Huygen's Principle (wavefront & geometry)
Fermat's Principle (least time/least OPL)
Maxwell's Equations



Reflection
Snell's Law



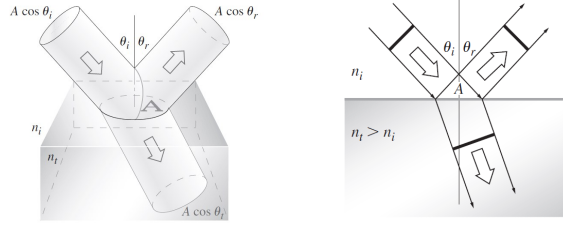
Snell's law and Fresnel Equations

- Normal incident, glancing incident
- Polarization angle
- Critical angle (evanescent wave)
- R, T and "conservation of energy"

EM-wave in metal (penetration depth)

3.3.3 能量相关

Reflectance & Transmittance



$$I = \langle S \rangle_T = \frac{v\varepsilon}{2} E_0^2 = \frac{c\varepsilon_0 n}{2} E_0^2$$

$$R = \frac{I_r A_r}{I_i A_i} = \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = rr^*$$

$$T = \frac{I_t A_t}{I_i A_i} = \frac{I_t A \cos \theta_t}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{n_t E_{0t}^2 \cos \theta_t}{n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i} \right) tt^*$$

式中，I 为辐照度，R 为反射比，T 为透射比。由能量守恒满足：

$$R + T = 1 \quad (3.9)$$

3.4 金属的光学特性

先给出 n 的表达式，下面讨论同样分为实部和虚部（我们关心 n_I -与吸收有关）：

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \left(\frac{f_e}{-\omega^2 + i\gamma_e \omega} + \sum_j \frac{f_i}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \right) \quad (3.10)$$

穿透深度（Penetration Depth）：通过对 Maxwell 方程添加类似阻尼力的修正，推导出金属中的 E：

$$E = E_0 e^{-\omega n_I y/c} \cos w(t - n_R y/c) \quad (3.11)$$

进一步得到辐照度：

$$\Rightarrow I(x) = I_0 e^{-\frac{2\omega n_I(\omega)}{c} x} \quad (3.12)$$

定义当 I 衰减到 $1/e$ 时为穿透深度 d ，吸收（衰减）系数是 $\alpha = 1/d$ ：

$$d = \frac{c}{2\omega n_I} \quad (3.13)$$

透射波函数可写为

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{A}_{2t} \exp(\mp \kappa z) \exp[i(k_{tx}x - \omega t)] \quad (3.14)$$

显然 κ 前只能取负号（否则能量发散）。对于振幅减小到界面处振幅的 36.8%（即 $1/e$ ）的深度为穿透深度。透射深度为

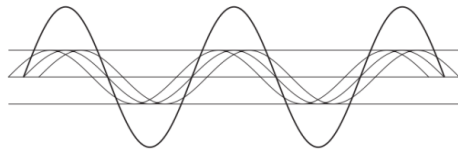
$$z_0 = \frac{1}{\kappa} = \frac{n}{k_t \sqrt{\sin^2 \theta_i - n^2}} \quad (3.15)$$

第4章 波的叠加

4.1 波的合成

重要方法：复数指数合成（Phasor）

Superposition of Coherent Harmonic Waves



$$E = \sum_{i=1}^n E_{0i} \exp(i\omega t \pm i\alpha_i) = E_0 \exp(i\omega t + i\alpha)$$

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^n E_{0i}^2 + 2 \sum_{j<i}^n \sum_{i=1}^n E_{0i} E_{0j} \cos(\alpha_i - \alpha_j)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n E_{0i} \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^n E_{0i} \cos \alpha_i}$$

If $E_{0i}=E_{01}$ for all i $\Rightarrow$ Random phase: $E_0^2 = n E_{01}^2$
In phase: $E_0^2 = n^2 E_{01}^2$

驻波（Standing waves）：两个波 w 相同，使用和差化积即可；

不同频率的波合成（以两个波为例，且一般频率相近）：

$$E = 2E_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T'}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T''}\right) \quad (4.1)$$

$$T' = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}, T'' = \frac{2T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

(4.1) 式中， T' 与原来差异不大， T'' 体现“拍频”。常见有以下处理：

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}, k_m = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (4.2)$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \omega_m = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$\Rightarrow E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos(k_m x - \omega_m t) \exp[i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)] \quad (4.3)$$

4.2 波的分解

主要是使用傅里叶级数进行对波的分解：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (4.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

写为积分形式 ($\omega - k$, $x - t$ 地位对等可以互换):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(k) \cos(kx) dk + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(k) \sin(kx) dk \\ A(k) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) \cos(kx) dx \\ B(k) &= \int_{-\infty}^\infty f(x) \sin(kx) dx \end{aligned} \quad (4.5)$$

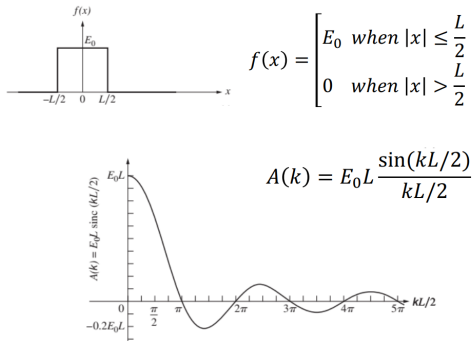
还可以写为指数形式:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{wave's decomposition}) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^\infty g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{wave's superposition}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

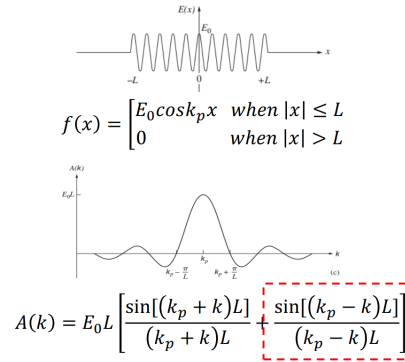
4.3 相干性与不确定原理

数学依据就是傅里叶级数变换, 体现粒子性与波动性的统一:

Example 1. Square Pulse



Example 2. Cosine Wave-train



上图中, 存在位置不确定度 (Δx) 与频率展宽 (Δf) Gauss 分布取 $1/e$ 时的值, 满足:

$$\begin{aligned} \Delta k \Delta x &= 4\pi \\ \Delta \omega \Delta t &= 4\pi \end{aligned} \quad (4.7)$$

从而可以定义:

- 相干时间 $\Delta t_c = \frac{1}{\Delta f}$
- 相干长度 $\Delta L_c = c \Delta t_c$
- 时间相干性: 光波在一定的光程差下能够发生干涉的事实表现了光波的时间相干性.
- 空间相干性: 光源大小与相干空间成反比关系, 给定一个光源尺寸, 就限制着一个相干空间.

计算常用到以下关系式:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta f}{f} \quad (4.8)$$

第5章 光的偏振

5.1 基本概念

光的偏振是指光波振动方向的特定取向。自然光是由多个方向上的振动组成的，而偏振光则只在一个特定的平面上振动。

5.2 偏振的分类

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t) = \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) + \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \quad (5.1)$$

- Linear polarization : $\varepsilon = 0$ or π
- Circular polarization $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{2}$ — 正左逆右（看左手/右手螺旋与 k 方向关系）
- Elliptical polarization:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\cos\varepsilon = \sin^2\varepsilon \quad (5.2)$$

- Random polarization : e. g. Natural lights

以上具有一定的合成关系 (线性叠加可以证):

$$\mathbb{P} = \mathbb{R} \pm \mathbb{L}$$

$$\mathbb{E} = a\mathbb{R} \pm b\mathbb{L}$$

5.3 Malus's Law

$$I(\theta) = \frac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2 \cos^2 \theta = I(0) \cos^2 \theta \quad (5.3)$$

5.4 双折射

5.4.1 原理解释

$D = \varepsilon E$ 中的 ε 是一个张量，我们可以对其对角化：

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

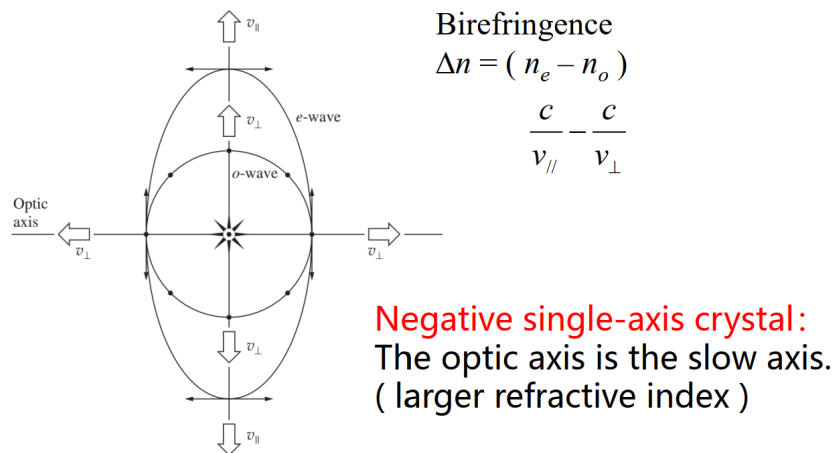
对角轴向量定义为光轴方向

满足：

$$\begin{aligned} U &= U_e + U_m = \vec{E} \cdot \vec{D} \\ &= \varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2 = \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \\ X &= \frac{D_x}{\sqrt{U}}, Y = \frac{D_y}{\sqrt{U}}, Z = \frac{D_z}{\sqrt{U}} \Rightarrow \frac{X^2}{\varepsilon_x} + \frac{Y^2}{\varepsilon_y} + \frac{Z^2}{\varepsilon_z} = 1 \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.4.2 单光轴晶体—o - ray and e - ray

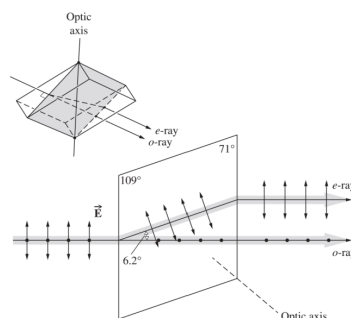
其实单光轴晶体是在 (5.5) 式中取两个方向上 ε 相同，且不同与第三方向；



记忆：o 光的 E 是与光轴正交的；若有平行成分就是 e 光；

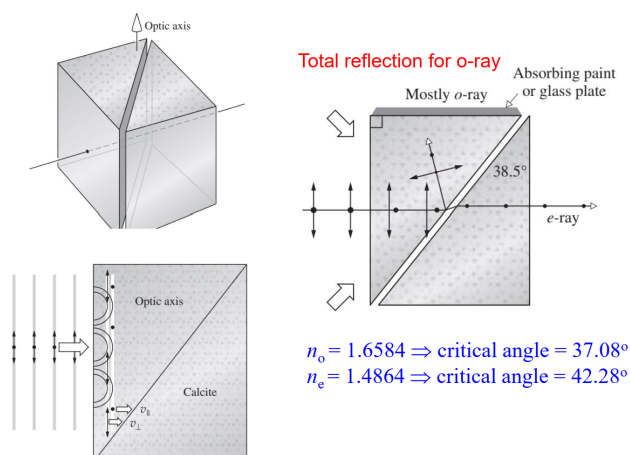
注意快轴与慢轴的概念：慢轴方向上是延后相位（等价于快轴方向提前相位）

o 光就是正常的光束，发生折射等；而 e 光可以“看见”两个折射率： n_o, n_e （两种成分合成）所以是可能产生分离的光束；



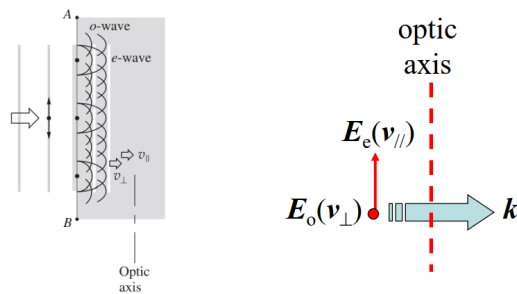
利用此特性：可以分离 o 光与 e 光：

Glan-Foucault Prism



5.4.3 相位调制

Phase Retarder – Wave Plates



Negative uniaxial retarder: $n_e < n_o \Rightarrow v_{\parallel} > v_{\perp}$
 (The optic axis is fast axis.)
 Positive uniaxial retarder: $n_e > n_o \Rightarrow v_{\parallel} < v_{\perp}$
 (The optic axis is slow axis.)

利用 n_o, n_e ; 在介质中产生不同的波速, 通过相同距离的时间不同而产生相位差; 进行相位的调制。

- $\frac{1}{2}$ 波片: $d|n_o - n_e| = (m + 1/2)\lambda_0$ 左变右
- $\frac{1}{4}$ 波片: $d|n_o - n_e| = (m + 1/4)\lambda_0$ 线偏变圆偏
- Fresnel Rhomb (利用反射的相位延迟); Babinet Compensators (调节厚度)

5.4.4 光学调制仪器

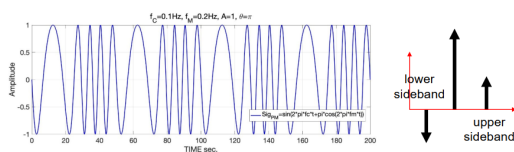
理解原理即可 Pockels Effect, Kerr Effect, Faraday Isolator

Phase Modulation

When $\theta \ll 1$, $J_0(\theta) \approx 1$ $J_1(\theta) \approx \frac{\theta}{2}$ $J_{n \geq 2}(\theta) \approx 0$

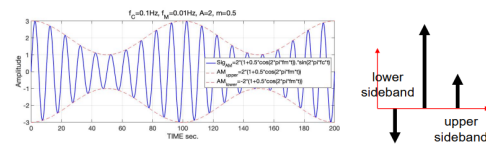
$$f(t) \approx A \sin(\omega t) + A\theta \cos(\omega t) \sin \omega_m t$$

$$f(t) = A \left[\sin(\omega t) + \frac{\theta}{2} \sin(\omega + \omega_m)t - \frac{\theta}{2} \sin(\omega - \omega_m)t \right]$$



Amplitude Modulation

$$f(t) = A [1 - m \sin(\omega_m t)] \sin(\omega t) \quad f(t) = A \sin(\omega t) - \frac{Am}{2} \cos(\omega - \omega_m)t + \frac{Am}{2} \cos(\omega + \omega_m)t$$



5.5 矩阵描述

5.5.1 Mueller Matrices*

Stokes Parameters, 用 1×4 向量描述, 了解即可;

5.5.2 Jones Matrices

$$E = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Horizontal $\mathcal{P}$ -state	Vertical $\mathcal{P}$ -state	$\mathcal{P}$ -state at $+45^\circ$	$\mathcal{P}$ -state at -45°	$\mathcal{R}$ -state	$\mathcal{L}$ -state
$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$
$L: \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) + \hat{j}E_0 \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ $R: \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) + \hat{j}E_0 \cos\left(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}\right)$					

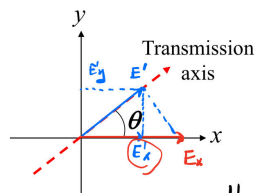
找光学器件的 Jones 矩阵：利用两束已知偏振的光线穿过，得到出射光，列出二维方程组，对比系数；

Linear optical element	Jones matrix	Linear optical element	Jones matrix
Horizontal linear polarizer $\leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Quarter-wave plate, fast axis vertical	$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$
Vertical linear polarizer $\updownarrow$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Quarter-wave plate, fast axis horizontal	$e^{i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$
Linear polarizer at $+45^\circ$ $\nearrow$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	Homogeneous circular polarizer right $\odot$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$
Linear polarizer at -45° $\nwarrow$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	Homogeneous circular polarizer left $\ominus$	$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$

Smaller n (larger phase velo)
Smaller OPL
Smaller phase

5.5.3 计算示范

1. A linear polarizer with the transmission axis at θ wrt the x-axis.



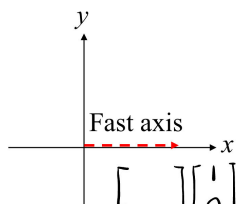
$$J = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$J \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

$$J \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta \end{bmatrix}$$

2. The fast axis is along the x-axis having a relative phase retardation of δ

$$\frac{2\pi d(n_s - n_f)}{\lambda_0} = \delta$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix}$$


$$\begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\delta} \end{bmatrix}$$

第6章 光的干涉

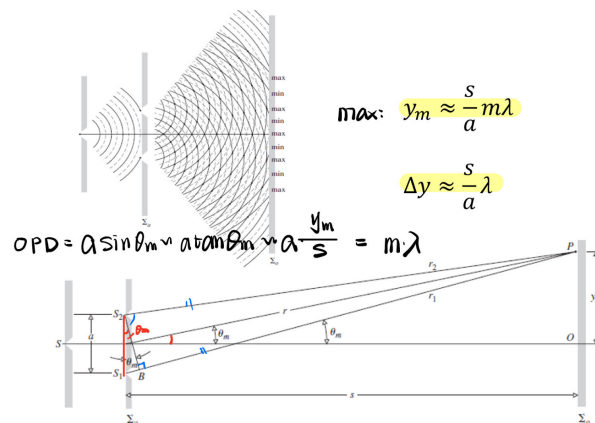
6.1 基本概念

光的干涉是指两束或多束光波相遇时，它们的波峰和波谷相互叠加的现象。这可以导致光强的增强（相长干涉）或减弱（相消干涉）。

产生干涉的条件： 1. 偏振； 2. 相干（频率可以不一样!!）

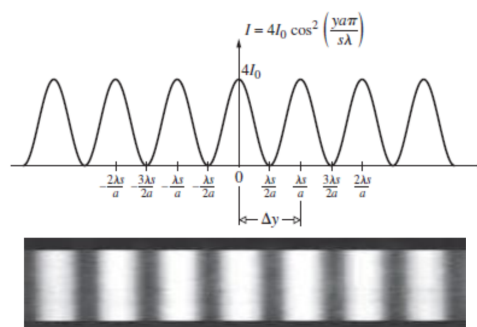
6.2 分波前干涉

6.2.1 杨氏双缝干涉



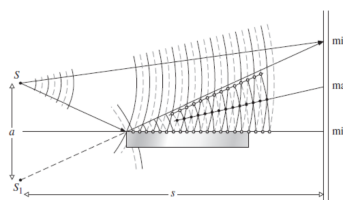
6.2.2 能谱

$$I(y) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{y a \pi}{s \lambda} \right) \quad (6.1)$$



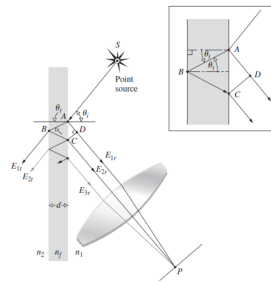
6.2.3 Lloyd's mirror

利用反射，类似对称形成双波源；注意考虑半波损失



6.3 分振幅干涉

6.3.1 Double-beam interference



$$\begin{aligned}
 OPD &= 2n_f d \cos \theta_t \\
 \text{phase shift} &= \frac{4\pi d n_f}{\lambda_0} \cos \theta_t (\pm \pi) \\
 &= \frac{4\pi d}{\lambda_0} (n_f^2 - n^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2} \pm \pi
 \end{aligned}$$

注意仅考虑在介质中反射一次；出射光与原来的光线进行干涉，这里也存在半波损失；

6.3.2 等倾干涉

入射角相同；发生干涉条件如下：

$$\text{max: } d \cos \theta_t = (2m + 1) \frac{\lambda_f}{4} \quad (6.2)$$

$$\text{min: } d \cos \theta_t = (2m) \frac{\lambda_f}{4} \quad (6.3)$$

6.3.3 等厚干涉

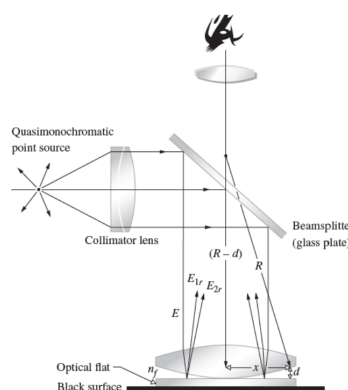
平行光入射到厚度变化均匀、折射率均匀的薄膜上、下表面而形成的干涉条纹。薄膜厚度相同的地方形成同条干涉条纹，故称等厚干涉。

$$d_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_f}{2} \quad (6.4)$$

6.4 其他干涉现象或仪器

6.4.1 Newton's ring

Newton's rings

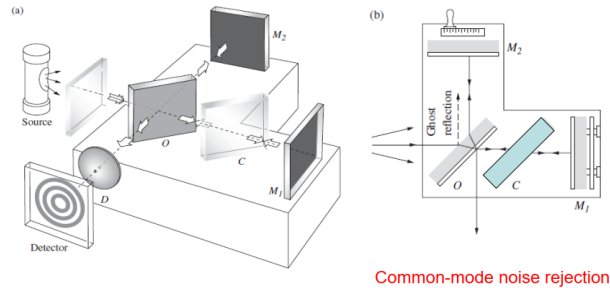


$$\begin{aligned}
 x^2 + (R - d)^2 &= R^2 \\
 \text{if } R \gg d &\Rightarrow x^2 = 2Rd \\
 \text{max: } 2n_f d_m &= \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 \\
 \Rightarrow x_m &= \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_f R\right]^{1/2}
 \end{aligned}$$

The diameter of the rings vary with $m^{1/2}$.

6.4.2 Michelson's interferometer

理论上，关于迈克尔逊干涉仪做过实验，相关原理和仪器，这里不再赘述；主要应用可以精密测 d 位移；叶老师 PPT 中还分析了噪声。



6.4.3 Others

- Heterodyne Interferometer (一般是有基准光校正目标光得到相关参数)
- Mach-Zehnder interferometer (n, 检测平整度)
- Sagnac interferometer(可作陀螺仪测转速, 天琴要搞一个“大的”)

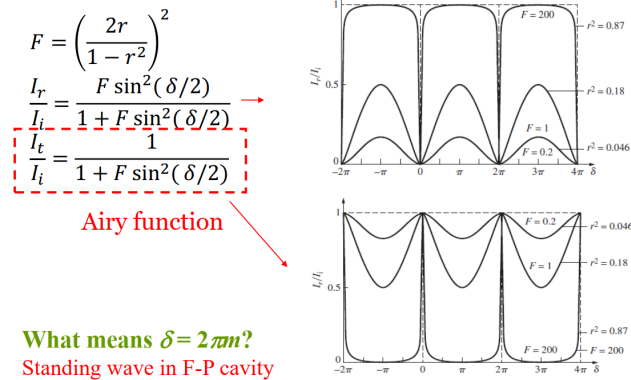
6.5 Multiple-Beam Interference

这部分公式较多, 有余力可以自行推导;

$$I_r = I_i \frac{[2r/(1-r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}{1 + [2r/(1-r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)} \quad (6.5)$$

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + [2r/(1-r^2)]^2 \sin^2(\delta/2)}$$

Coefficient of finesse F



$$finesse = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \quad (6.6)$$

$$(\Delta\lambda)_{min} = \frac{\lambda_0^2}{\pi n_f} \quad (6.7)$$

$$(\Delta f)_{min} = \frac{c}{\pi n_f d \sqrt{F}}$$

$$finesse = \frac{2\pi}{(\Delta\delta)_{min}} = \frac{(\Delta\lambda_0)_{fsr}}{(\Delta\lambda_0)_{min}} = \frac{(\Delta f)_{fsr}}{(\Delta f)_{min}} \quad (6.8)$$

6.6 Single & Multilayer Films

还是通过 E.B 连续性方程以及能量守恒关系去列；解得：

1. When $E \perp$ plane-of-incidence:

$$\begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 h & -i \frac{\sin k_0 h}{\gamma} \\ -i \gamma \sin k_0 h & \cos k_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} n_1 \cos \theta_{iII} \quad (6.9)$$

2. When $E //$ plane-of-incidence:

$$\begin{bmatrix} E_{II} \\ H_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0 h & i \frac{\sin k_0 h}{\gamma} \\ i \gamma \sin k_0 h & \cos k_0 h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_I \\ H_I \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{n_1}{\cos \theta_{iII}} \quad (6.10)$$

多层膜就是作矩阵乘法，注意顺序。——从左向右写，计算也是。

第7章 光的衍射

7.1 基本概念

光的衍射是指光波遇到障碍物或狭缝时发生的弯曲和扩散现象。衍射导致光波在障碍物后形成新的波前。

注意：本章的核心理论涉及的推导还是参看原课件，这里主要进行简单的总结：

Uncertainty Principle 在本章中也是一种解释视角，可以看出其无处不在。

7.2 Kirchhoff's Scalar Diffraction Theory

$$E_P = -\frac{iE_0}{\lambda} \oint_S \frac{e^{ik(\rho+r)}}{\rho r} \left[\frac{\cos(\hat{n}, \hat{r}) - \cos(\hat{n}, \hat{\rho})}{2} \right] dS \quad (7.1)$$

后半段视为倾斜因子，在较远时可以近似为一个常数：

7.3 Fraunhofer Diffraction(远场衍射)

7.3.1 条件

$$R > \frac{a^2}{\lambda} \quad (7.2)$$

R-缝到屏的距离；a-缝宽；计算时比较量级。

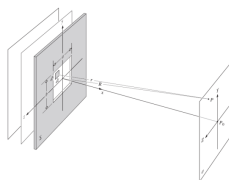
7.3.2 分类及计算

Fraunhofer Diffraction of Rectangular Aperture

Assumption: coherent secondary point sources within the aperture.

Source point $(0, y, z)$, Observation point (X, Y, Z)

$$E_P = -\frac{iE_0}{\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS \quad r \sim R \left(1 - \frac{yY + zZ}{R^2} \right)$$

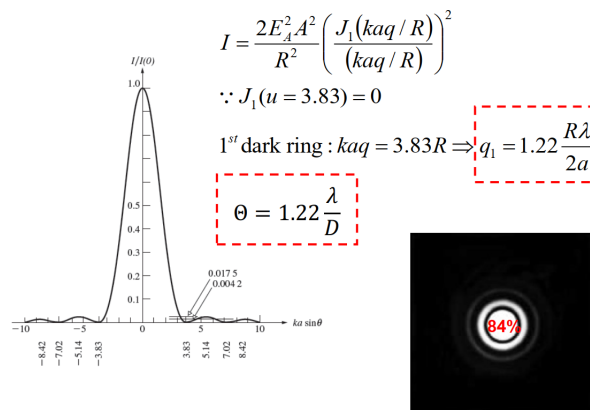


$$\begin{aligned} A &= ab, E_A = -\frac{iE_0}{\lambda} \frac{e^{-ikL}}{L} \\ E &= \frac{AE_A}{R} e^{i(kR - \omega t)} \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right) \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right) \\ \alpha' &= \frac{kaZ}{2R}, \beta' = \frac{kbY}{2R} \\ I(Y, Z) &= I(0) \left(\frac{\sin \alpha'}{\alpha'} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta'}{\beta'} \right)^2 \end{aligned}$$

Circular Aperture-圆形孔径:

$$E = \frac{E_A e^{i(kR - \omega t)}}{R} \int_{\rho=0}^a \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(k\rho q/R) \cos(\phi - \Phi)} \rho d\rho d\phi \quad (7.3)$$

Airy Disk & Airy Rings



!! 重要: 角宽度 (分辨率):

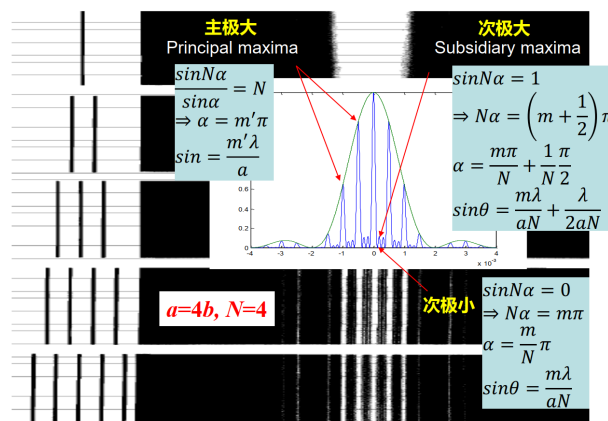
$$(\Delta\theta)_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (7.4)$$

Single Slit-长矩形:

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{kb \sin \theta}{2} \quad (7.5)$$

Double Slits: 一到许多光栅；公式见原文，下给出可视化结果：

Experimental and Theoretical Results



光栅方程:

$$a(\sin \theta_m - \sin \theta_i) = m\lambda \quad (7.6)$$

7.4 Fresnel Diffraction(近场衍射)

不满足远场条件时需要一些更复杂的数学手段来解决衍射问题:

1. 圆孔:

Secondary wavelets:

$$E = \frac{E_1}{2} = \frac{K_1 E_0}{(\rho + r_0)} \exp[i(k\rho + kr_0 - \omega t)] \quad (7.7)$$

Primary wave, S→P:

$$E = \frac{E_0}{(\rho + r_0)} e^{i[k(\rho+r_0)-\omega t]} \quad (7.8)$$

The Vibration Curve—类似相位矢量图的分析方法:

2. 方孔:

$$E \approx \frac{-iE_0}{2(\rho_0 + r_0)} e^{-i\omega t} e^{ik(\rho_0+r_0)} \int_{u_1}^{u_2} e^{\frac{i\pi u^2}{2}} du \int_{v_1}^{v_2} e^{\frac{i\pi v^2}{2}} dv \quad (7.9)$$

$$u = \sqrt{\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\rho_0 r_0 \lambda}} y, \quad v = \sqrt{\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\rho_0 r_0 \lambda}} z \quad (7.10)$$

The Cornu Spiral—度量长度表征大小。

3. 长矩形孔 (slit) —方空一边 $\rightarrow \infty$

以上可统一写为:

$$I = \frac{I_0}{4} \left\{ [A(u_2) - A(u_1)]^2 + [B(u_2) - B(u_1)]^2 \right\} \times \left\{ [A(v_2) - A(v_1)]^2 + [B(v_2) - B(v_1)]^2 \right\} \quad (7.11)$$

一般计算 u, v 剩下可以查表。

Summary

Chap. 2 Electromagnetic Theory & Light

- Maxwell's equations
- Dispersion relation

Chap. 3 The propagation of Light

- Snell's law & Fresnel's equations
- Total internal reflection
- Approach:
 - (1) Fermat's Principle
 - (2) Electromagnetic Approach

Chap. 4 Polarization

- $\mathcal{P}$ -state, $\mathcal{R}$ - and $\mathcal{L}$ -state, $\mathcal{E}$ -state
- Dichroism & birefringence
- Polarizer & wave-plates
- Photoelasticity, Faraday effect, Kerr and Pockels effects
- Jones matrices

Chap. 5 Interference

- Conditions for interference
- Wavefront-splitting interferometers
(Young's experiment, Lloyd's mirror)
- Amplitude-splitting interferometers
 - (1) Equal-inclination & equal-thickness interferometry
 - (2) Michelson, Mach-Zender and Sagnac interferometers
 - (3) Fabry-Perot interferometer
- Multilayer films (characteristic matrix)

Chap. 6 Diffraction

- Fraunhofer diffraction
(rectangular, circular aperture, single slit, double slits
many slits, diffraction grating)
- Fresnel diffraction
 - (1) Fresnel zones & vibration curve
(circular aperture, circular obstacle)
 - (2) Cornu Spiral
(rectangular aperture, single slit, semi-infinite
opaque screen)

第8章 名词及原理解释

8.1 光学名词

光线 (Ray): 表示光传播的方向的直线。

光束 (Beam): 一组平行的、发散的或汇聚的光线。

折射 (Refraction): 光线从一种媒质进入另一种媒质时, 其方向发生改变的现象。(原因: 传播速度改变)

折射率 (Refractive Index): 表示媒质对光速的影响, 光在真空中的速度与光在该媒质中的速度之比。

全反射 (Total Internal Reflection): 当光线从高折射率的媒质入射到低折射率的媒质, 并且入射角大于某个特定角度时, 光线完全反射回高折射率媒质的现象。

色散 (Dispersion): 不同颜色的光在某种媒质中传播速度不同, 导致其折射角不同的现象。

偏振 (Polarization): 描述光波振动方向的属性, 只有特定方向的振动组件能够传播。

偏振角 (Brewster's angle) 又称布儒斯特角, 自然光经电介质界面反射后, 反射光为线偏振光。

光波长 (Wavelength): 光波的一个完整周期的长度。

光频率 (Frequency): 在一秒内经过的波数, 通常用赫兹 (Hz) 表示。

光强度 (Intensity): 描述光波的强度, 与其能量传输率有关。

波前 (Wavefront): 在同一时刻, 光波振动相位相同的点组成的面。

干涉 (Interference): 两个或多个同频率的光波叠加时, 光强度的增强或减弱的现象。

相干 (Coherence): 描述波的相位关系的稳定性。为了产生干涉, 光源需要具有一定的相干性。

衍射 (Diffraction): 当光波遇到障碍物或通过狭缝时, 它的传播方向发生偏离的现象。

相位 (Phase): 描述波动周期中某一点的位置。

波矢 (Wave Vector): 指示光波传播方向和波数的矢量。

8.2 生活现象解释

彩虹 (Rainbow): 当阳光穿过雨滴时, 光线会发生折射、反射和再次折射, 形成彩虹的颜色带。

蓝天和红日落 (Blue Sky and Red Sunset): 大气中的分子和小粒子散射短波长的光 (蓝光) 比长波长的光 (红光) 更为强烈。白天时, 蓝光的散射使天空呈蓝色; 而日落时, 太阳的光线经过的大气层更厚, 蓝光被散射掉, 剩下的长波长光使天空和太阳显得红色。

水中的折射 (Refraction in Water): 当一根直棒 (如鱼竿) 部分地插入水中时, 棒在水中的部分似乎是弯曲的。这是因为光从水传到空气时的折射。

镜子的反射 (Mirror Reflection): 光线打到平滑表面 (如镜子) 时, 它会反射回来, 使我们能够看到自己的倒影。

放大镜 (Magnifying Glass): 凸透镜可以使物体看起来比实际大。这是因为它将光线汇聚, 改变了我们的视角。

全反射 (Total Internal Reflection): 在水中向上看, 超过某个角度的光线不会从水中透出, 导致水面下方的某个区域是黑暗的。

光的散射 (Light Scattering): 当光线穿过含有许多小粒子的介质 (如烟雾、雾或云) 时, 光线被散射成多个方向。

3D 电影 (3D Movies): 通过使用两个略有差异的图像和特殊的眼镜, 我们的大脑可以解释出深度信息, 从而产生三维效果。

偏振光 (Polarized Light): 某些眼镜和摄像机滤镜可以只允许特定方向的光波通过, 从而减少眩光和提高对比度。

光纤通信 (Fiber Optic Communication): 光纤内的光通过全反射传播, 可以将信息高速传输到远距离。

第9章 关于叶老师

参考资料为叶老师课程 PPT，若有纰漏请联系 2540181946@qq.com

[关于叶老师]<https://mp.weixin.qq.com/s/QHAGx9ohqZv1B9FdZROFgg>

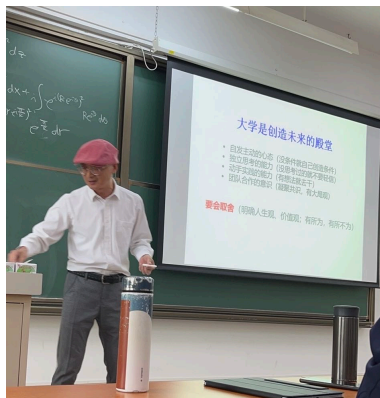
原标题为天琴瞬间（2）| 师德师风 | 学物理的人是离真理最近的人——叶贤基教授访谈，点击链接直达。

叶老师最后一课的讲话：（他一直将德育与智育融合在课程中）

Quotes:

- 问题就出在这里，真正开始看这些东西的时候，你就会跟着那个书里面走，你就好像是整个经历过他的一生一样，所以你的的人生观跟价值观就是在这个过程当中一次又一次去塑造出来，这就是我的整个跟其他人不一样的地方，为什么我很早的时候我就可以确定我到底要什么，关键就在这里，你们现在缺的那个环节，你们的成长过程里面缺了这个环节，因为你们基本上所有的时间全部放在考试，全部放在准备考试。
- 这个问题其实我思索了很久，因为我女儿跟你们差不多是同同一个同一个时代，我就发现了这个情况，所以他到了这个年纪的时候，你问他你想要什么，你真正想要什么，他答不上，我估计你们很多人可能是类似的情况，虽然你们的成绩很好，你们进了 985，可是如果你真的问自己真的问自己，我到底要什么，我以后的生活我想怎么过，什么东西对我最重要，你们可能都答不上来。那这个会造成什么影响？你们一旦开始面临人生抉择的时候，你们会无所适从，就会开始出现这个问题。
- 我今天做了这个决定，任何的后果都是由我来承担，你们有没有这个勇气？
- 我知道很多人没有，我说句实在话，因为我们的教育告诉我们的是不要犯错。不对，丢掉这个东西，我们真正能学到东西的其实反而是在失败的时候。

科研之后，叶老师说将学习艺术，非常期待。



整理于 2023 · 冬，仅作分享纪念义