数理方法复习笔记

Siyan Dong

第 1 章　复变函数基础

1.1　可导性

若 Δz 以任意方式趋于 0 时，$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(a+\Delta z)-f(a)}{\Delta x}$ 恒为一常数, 则称 $f(z)$ 在 a 点可导。

1.2　解析函数

若 f(z) 在区域 G 内处处可导，则称 f(z) 是 G 内的解析函数。解析函数无穷阶可导

1.2.1　Cauchy-Riemann 条件

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}\quad \text{其中} f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y). \tag{1.1}$$

$$f(z)\text{可导 (解析)} \iff \begin{cases}\text{Cauchy-Riemann 条件}\\ \frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}\text{均连续}\end{cases} \tag{1.2}$$

调和函数满足二维 Laplace 方程：

$$f(z)\text{可导 (解析)} \implies \begin{cases}\nabla^2 u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0\\ \nabla^2 v=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v=0\end{cases} \tag{1.3}$$

1.2.2　奇点

定义：$f(z)$ 在 z_0 处无定义，或有定义但不可导，或可导但不解析（奇——性质）

- 可去奇点:　函数在该点的邻域内有界。通过重新定义函数在该点的值，可以使函数在该点解析。例如，函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $z=0$ 处有一个可去奇点。
- 极点: 函数在奇点附近的行为是无界的, 存在一个正整数 (阶数) n 使得 $(z-z_0)^n f(z)$ 在 z_0 附近有界且非零。
- 本质奇点：　排除上面两种情况的复杂情况，例如，函数 $e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处有一个本质奇点。

1.3　多值函数

多值性来源：宗量（z-a）辐角的多值性；　举例：$ln(z)z^{\frac{1}{n}}$

1.3.1 分支点

对于函数 $f(z)$，如果在包围一个点 z_0 的任意小路径上，函数 $f(z)$ 的值在绕行一圈后发生变化，那么 z_0 被称为分支点。
如：对数函数 $\log(z)$ 的分支点在 $z=0$。$z^{1/n}$（n 为正整数）在 $z=0$ 和无穷远处有分支点。
为了处理分支点，通常会在复平面上引入分支切割来制造一个多值函数的单值分支。

1.4 例题

例 1 写出以下复数的实部、虚部、模、辐角：$\sqrt[i]{2i}$

解：$(\sqrt[i]{2i} = [e^{ln2+i(\frac{1}{2}+2n)\pi}]^{-i} = e^{(\frac{1}{2}+2n)\pi-i\ln 2} = e^{(\frac{1}{2}+2n)\pi}(\cos\ln 2 - i\sin\ln 2)$
实部：$e^{(\frac{1}{2}+2n)\pi}\cos\ln 2$, 虚部：$e^{(\frac{1}{2}+2n)\pi}\sin\ln 2$, 模：$e^{(\frac{1}{2}+2n)\pi}$, 幅角：$\ln 2+2m\pi$ *(n,m 均为正整数)*

例 2 画出下面表达式所表示的区域 $0<\arg\frac{z-i}{z-2}<\frac{\pi}{3}$

解：设$z=x+iy$，则$\frac{z-i}{z-2}=\frac{x+i(y-1)}{x-2+iy}=\frac{x^2+y^2-2x-y+i(2-x-2y)}{(x-2)^2+y^2}$ 原式则等价于 $0<\frac{2-x-2y}{x^2+y^2-2x-y}<\tan\frac{\pi}{3}$,
因幅角值在 $(0,\frac{\pi}{3})$, 所以该式分子分母同为正. 化简可得约束条件；图略.

例 3 找出下列多值函数的支点，并讨论 z 绕一个及多个支点一周后，函数值的变化
(1) $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$, (2) $\ln\frac{z-a}{z-b}$。

解：(1) 设 $z-a=r_1e^{i(\theta_1)+2k_1\pi}, z-b=r_2e^{i(\theta_2)+2k_2\pi}$ 则 $w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}=\sqrt{r_1r_2}e^{\frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+2k\pi)}$
a,b 点显然为支点，绕 *a,b* 支点一周函数值变化 $\sqrt{r_1r_2}e^{2i\pi/3}$,
下证 ∞ 点处也为支点: 令 $z=\frac{1}{t}$, 则 $w=\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}=\sqrt[3]{\frac{(1-at)(1-bt)}{t^2}}$ 因绕 0 点旋转，因此 $\arg(1-at)$,*arg(1-bt)* 均不变，而 t^2 变化 4π, 因此 w 变化了 $\sqrt{r_1r_2}e^{4i\pi/3}$, 因此 ∞ 处也为支点
(2) 设 $z-a=r_1e^{i(\theta_1)+2k_1\pi}, z-b=r_2e^{i(\theta_2)+2k_2\pi}$ 则 $w=\ln\frac{\mathrm{z-a}}{\mathrm{z-b}}=\ln\frac{\mathrm{r_1}}{\mathrm{r_2}}+i[\theta_1+\theta_2+(2\mathrm{k}_1-2\mathrm{k}_2)\pi]$
因此 *a,b* 点均为支点，绕一个点旋转 *1* 周变化 2π, 绕两个点旋转一周不变考虑 ∞ 点，令 $z=\frac{1}{t}$
$w=\ln\frac{\mathrm{1-at}}{\mathrm{1-bt}}$, 当 $t=0$ 时，$\arg(1-at),\arg(1-bt)$ 均不变，因此 ∞ 处不是支点

第 2 章 复变积分

2.1 Cauchy 定理

若 f(z) 在闭曲线 C 包围的闭区域解析，那么（多连通区域亦可）：

$$\oint_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{2.1}$$

2.2 Cauchy 积分公式

f(z) 在 $\bar{G}$ 上是单值解析函数，分段光滑曲线 C 为 $\bar{G}$ 的边界，则有:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \tag{2.2}$$

推论：

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C^+}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{2.3}$$

2.3 两个有用的引理

2.3.1 小圆弧引理

若 $f(z)\in C(U^\circ(a))$, 并且在 $\theta_1\le \arg(z-a)\le\theta_2$ 中，$(z-a)f(z)\to k\ (|z-a|\to 0)$，则有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1) \tag{2.4}$$

2.3.2 大圆弧引理

若 $f(z)\in C(U^\circ(\infty))$, 并且在 $\theta_1\le \arg(z-a)\le\theta_2$ 中，$zf(z)\to K\ (z\to\infty)$，则有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=\mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1). \tag{2.5}$$

注：大、小圆弧引理中 K = 0 或 k = 0 非常常用。也有一些不满足一致收敛的情况使复变积分收敛于 0

2.4 例题部分

例 4 已知解析函数 $f(z)$ 的实部：$u(x,y)$ 或虚部 $v(x,y)$，求该解析函数：$u(x,y)=\cos x\cosh y$

解：首先计算偏导数 $\partial_x\mu=-\cosh x\sin x$ 与 $\partial_y\mu=\cos x\sinh x$ 。
利用柯西-黎曼条件得到，$\partial_x\nu=-\partial_y\mu=-\cos x\sinh x$ 与 $\partial_y\nu=\partial_x\mu=-\cosh y\sin x$。
利用 ν 的偏导数求原函数，$d\nu=\partial_x\nu dx+\partial_y\nu dy$ 。
这里有三种积分方法：一、凑全微分法，$d\nu=\partial_x\nu dx+\partial_y\nu dy=-\cos x\sinh x+-\cosh y\sin x=-d(\sin x)\sinh x+\ -d(\sinh y)\sin x=d(-\sin x\sinh x)$。
二、积分因子法，首先计算 $f(x,y)=\int\partial_x\nu dx+C(y)$, 然后通过另一个偏导数确定 $C(y)$

$$\frac{d}{dy}\left(\int\partial_x\nu dx+C(y)\right)=\partial_y\nu\,,$$

三、路径无关积分法，可以选择路径计算 $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}\partial_x\nu dx+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}\partial_y\nu dy$。注意选择的路径需要
结果，$\nu=-\sin x\sinh y+c$。$f(z)=\cos x\cosh y+i\sin x\sinh y+ic=\sin z+ic$。
易错点：切勿将偏导数代人 $d\nu=\partial_x\nu dx+\partial_y\nu dy$ 直接积分。

例 5 计算积分 $\oint_{|z|=R} lnz\mathrm{d}z$ 割线为正实轴，在割线上岸，ln 1 = 0

解：因 lnz 是一个多值函数，$\ln z=\ln|z|+i(\theta+2n\pi)$ 当 $z=1$ 时，在割线上岸 $i(\theta+2n\pi)|_{\theta=0}=0$,
因此 $n=0$ 因此我们可以按照 *(1)* 中将其写为 $dz=iRe^{i\theta}d\theta$, 且 $\ln z=\ln R+i\theta$

$$\oint_{|z|=R}\ln z dz=\int_0^{2\pi}(\ln R+i\theta)iRe^{i\theta}d\theta=2\pi iR$$

例 6 计算$\oint_{|z|=b} \frac{\cos z}{(z-a)^2}|dz|$，分别考虑$b>a$ 和$b<a$ 的情况。

解：题 2 中的 (1) 可知：$|dz| = \frac{Rdz}{iz}$ 因此原式可以变为：$\oint_{|z|=b} \frac{R\cos z}{iz(z-a)^2}dz$

首先考虑 $b<a$ 的情况，此时仅有 $z=0$ 一个支点

$\oint_{|z|=b} \frac{R\cos z}{iz(z-a)^2}dz = \frac{b}{i}\oint_{|z|=b} \frac{\cos z}{z(z-a)^2}dz = \frac{b}{i}\oint_{|z|=b} \frac{f(z)}{z}dz = \frac{b}{i}2\pi i f(z)\big|_{z=0} = \frac{2b\pi}{a^2}$

其中 $f(z) = \frac{\cos z}{(z-a)^2}$

当 $b>a$ 时，此时有 $z=0$ 和 $z=a$ 两个奇点，我们可以围绕两个奇点作两个小圆，分别记为 C_1, C_2，此时 $\oint_{|z|=b} = \oint_C + \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$ 其中函数在 C 中处处解析，因此由 *Cauchy* 定理可知 $\oint_C = 0$，此时 $\oint_{|z|=b} = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$，也可以使用留数定理。

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=b} \frac{R\cos z}{iz(z-a)^2}dz &= \frac{b}{i}\left(\oint_{C_1} \frac{f_1(z)}{z}dz + \oint_{C_2} \frac{f_2(z)}{(z-a)^2}dz\right) \\
&= \left(\frac{2\pi i}{a^2} + \left(\frac{\cos z}{z}\right)'\bigg|_{z=a} 2\pi i\right)\frac{b}{i} \\
&= \frac{2\pi b(1 - a\sin a - \cos a)}{a^2}
\end{aligned}$$

其中 $f_1(z) = \frac{\cos z}{(z-a)^2}$，$f_2(z) = \frac{\cos z}{z}$

例 7 计算 $\oint_C \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$，其中 C 为 (1) $|z| = 1$，(2) $|z| = 2$ 。

解：(1) $|z| = 1$ 时仅有 $z = 0$ 一个 3 阶奇点，令 $f(z) = \frac{1}{z^{10}-2}$

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} = \frac{2\pi i}{2!}f''(z)\bigg|_{z=0} = 0$$

(2)$|z| = 2$ 时，函数共有 11 个奇点，不容易分析，因此我们作变换：$z = \frac{1}{t}$

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} = -\oint_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{t^{11}}{2t^{10}-1}dt$$

此时有 $t^{10} = \frac{1}{2}$，因此这些奇点均在 $|t| = \frac{1}{2}$ 的圆外，因此函数在圆内解析

$$\oint_{|t|=\frac{1}{2}} \frac{t^{11}}{2t^{10}-1}dt = 0$$

或者使用大圆弧定理进行判断：因为 $\lim_{z\to\infty} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} = 0$，而且在 $|z| > 2$ 上没有奇点

$$\oint_{C:|z|=2} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} = \oint_{C:|z|\to\infty} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} = 0$$

第 3 章 解析函数的局域展开

3.1 级数知识复习

- 复数项级数定义，收敛的判定方法
- 绝对收敛、一致收敛、收敛的性质

- 幂级数：收敛半径，求 R 的方法，收敛区域；

3.2 Taylor 展开

函数 f(z) 在以 a 为圆心的圆 C 内解析，则对 $\forall z \in C$，都可以展开为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad |z-a|<R \tag{3.1}$$

系数的求法：

- Cauchy 积分公式：$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z$
  其中 L^+ 为 C 内任一逆时针绕 a 一周的路径。
- 使用常用级数的线性组合、级数乘法、导数、积分、“待定系数法”（仅适用于有限个负幂项或正幂项的情况）。

3.3 Laurent 展开

函数 $f(z)$ 在以 b 为圆心的环形区域 $C: R_1<|z-b|<R_2$ 中单值解析，则对 $\forall z \in C$, 都可展开为：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-b)^n, \quad R_1<|z-b|<R_2, \tag{3.2}$$

其中，：$c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{L^+} \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}} \mathrm{d}z$ L^+ 为 C 内任一逆时针绕 a 一周的路径。
以上两种展开方式均具有唯一性.

常用技巧：$|z|>1$ 时的几何级数展开:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-1} \\
&= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\
&= -\frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1) z^k \quad |z|>1
\end{aligned} \tag{3.3}$$

第 4 章 留数定理

围绕解析函数 f(z) 的孤立的 $\forall$ 奇点 b_K 作简单闭合曲线 γ_k，则 f(z) 在 b 点的留数定义为:

$$\operatorname{Res} f(b_k) \equiv \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_k^+} f(z) \mathrm{d}z=c_{-1} \tag{4.1}$$

即 Laurent 展开的 -1 次项系数。

例 8 将下列函数在指定点展开为泰勒级数, 并给出收敛半径

(1) $\sin z$ 在 $z=n\pi$, (2) $\frac{1}{1+z+z^2}$ 在 $z=0$, (3) $\frac{1}{z^2}$ 在 $z=-1$, (4) $\ln\frac{1+z}{1-z}$ 在 $z\to\infty$ 。

解：*(1)* 一般展开：$\sum_{k=0}\frac{\sin^{(k)}(n\pi)}{k!}(z-n\pi)^k$ 。当 n 为偶数时, $\sin(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(z-n\pi)^{2m+1}$; 当 n 为奇数时, $\sin(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}(z-n\pi)^{2m+1}$ 。收敛半径, 全复平面

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 2(n+1)\pi/3}{\sin 2\pi/3}z^n, |z|<1$

(3) 设 $t=z+1, \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$, 收敛半径 $z=1$

(4) $-i\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{1-2n}}{2n-1}$, 收敛半径 $z=1$

例 9 将下列函数在指定区域展开为洛朗级数 (20 分)

(1) $\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $1<|z|<2$, (2) $\frac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $2<|z|<\infty$, (3) $\frac{1}{z^2(z-1)}$ 在 $z=1$ 附近, (4) $z^3e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 附近。

解：*(1)* $\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\sum_{n=1}^{-\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$

(2) $\frac{1}{z^2-3z+2}=\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{n-1}$

(4) $z^3e^{\frac{1}{z}}=\frac{e^t}{t^3}=\frac{1}{t^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!}$

4.1 留数定理

若分段光滑简单闭合曲线 L 包围的区域中，除孤立奇点 $b_1,\cdot\cdot\cdot,b_n$ 外 f(z) 单值解析，那么:

$$\mathrm{Res}f(b_k)\equiv\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\gamma_k^+}f(z)\mathrm{d}z=c_{-1} \tag{4.2}$$

注意：无穷远点应该做代换：$t=\frac{1}{x}\to 0$

4.2 留数的求法

4.2.1 直接展开法

适用于较简单的分式、基本函数的线性组合等。可能需要对含无穷项的展开式使用几何级数展开等。

例 10 求 $\frac{1}{\sin z}$ 在 z = 0 处的留数

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z}&=\frac{1}{z-\frac{z^3}{3!}+o(z^4)}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{3!}+o(z^3)\right)}\\&=\frac{1}{z}\left(1+\left(\frac{z^2}{3!+o(z^3)}\right)+\left(\frac{z^2}{3!+o(z^3)}\right)+\cdots\right)\\&=\frac{1}{z}+\frac{z}{3}+o(z^2)\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2.2 待定系数法

由于有“有限负幂项或有限正幂项”的限制，一般用来求有限阶极点的留数。

例 11 求 $\frac{e^z}{sin^2 z}$ 在 z= 0 点的留数

解：已知：

$$\sin^2 z = z^2 - \frac{1}{3}z^4 + o(z^5), e^z = 1 + x + o(x), \tag{4.4}$$

初步判断 $z = 0$ 为 k 阶极点，设

$$\frac{e^z}{\sin^2}\frac{1}{z} = c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + o(z) \tag{4.5}$$

则有：

$$\left(c_{-2}\frac{1}{z^2} + c_{-1}\frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + o(z)\right)\left(z^2 - \frac{1}{3}z^4 + o(z^5)\right) = 1 + z + o(z) \tag{4.6}$$

对比 z 项系数，得到 $c_{-1} = 1$

4.2.3 画小圈圈法

作 f(z) 的某单值解析域 G 内的简单闭合曲线 γ，使 γ 只围绕奇点 b，则

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\gamma^+} f(z)\mathrm{d}z \tag{4.7}$$

4.2.4 大圆量级法

若 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 且 P (z) 与 Q(z) 展开后的最高次项分别为 $a_{n-1}z^{n-1}$ 与 $b_n z^n$，且展开式在全复平面（或给定大小的圆之外）收敛，则 f(z) 在所有孤立奇点的留数之和为：

$$\sum \mathrm{Res}\ z_k = \frac{a_{n-1}}{b_n} \tag{4.8}$$

求除无穷原点外的所有奇点的留数和亦可使用“留数和定理”

4.2.5 升幂极限法

若 $z = b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，即 $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z-b)^k$.

- when m = 1:
$$Resf(b) = \lim_{z\to b}(z-b)f(z) \tag{4.9}$$
- when m > 1: $(z-b)^m f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z-b)^{k-m}$ 只有正项级数和常数项，对其求 $m-1$ 次导数 $k = -m$ 后，常数项变为 $c_{-1}(m-1)!$.

4.2.6 洛必达法

若 z = b 是 f(z) 的**一阶极点**，且可以表达为 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 则：

$$\mathrm{Res}f(b) = \frac{P(b)}{Q'(b)} \tag{4.10}$$

例 12 求 $\frac{1}{(e^z-1)^2}$ 在 z = 0 点的留数

解：初步判断 $z=0$ 为 k 阶极点

$$z^2 f(z)=\frac{z^2}{(e^z-1)^2}=c_{-2}+zc_{-1}+z^2c_0+\cdots \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}\left(z^2f(z)\right)'&=\frac{2z(e^z-1)^2-z^2(e^z-1)\cdot 2e^z}{(e^z-1)^4}\\&=\frac{2z}{(e^z-1)^3}(e^z-1-ze^z)\\&=c_{-1}+2zc_0+3z^2c_1+\cdots\end{aligned}\tag{4.12}$$

then:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\left(z^2f(z)\right)'&=2\cdot\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2}\\&=2\cdot\frac{z+\frac{1}{2}z^2+o(z^2)-z-z^2+o(z^2)}{(z+o(z))^2}\\&=2\cdot\frac{-\frac{1}{2}z^2+o(z^2)}{z^2+o(z^2)}\\&=-1\end{aligned}\tag{4.13}$$

例 13 求下列函数在 z_0 处的留数 $\frac{f''(z)}{f(z)}$,z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶零点，n 为正整数

解：$f(z)=(z-z_0)^n g(z)$, 继而写出 f' 和 f''

求a_{-1}：

$$\frac{f''}{f}=\frac{1}{(z-z_0)^2}\left[n(n-1)+2n(z-z_0)\frac{g'}{g}+\frac{g''}{g}\right]$$

$$\operatorname{res}(z_0)=a_{-1}=2n\frac{g'}{g}\bigg|_{z=z_0}$$

求$\frac{g'}{g}|_{z=z_0}$：

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}(z-z_0)^m\\&=(z-z_0)^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z-z_0)^m\end{aligned}$$

$$g(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m+n)}(z_0)}{(m+n)!}(z-z_0)^m$$

$$g(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\qquad g'(z_0)=\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}$$

$$\frac{g'}{g}\bigg|_{z=z_0}=\frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{f^{n}(z_0)}$$

得到结果:$\frac{2n}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(z_0)}{f^{(n)}(z_0)}$。

第 5 章 数理方程预备知识

5.1 Einstein 求和约定

Einstein 求和约定其实就是一个偷懒符号，不过在一些比较复杂的计算中会有效的。一般地，对于对象 $a_1, \cdots, a_n$ 的和 S, 我们会写成 $S=\sum_{i=1}^n a_i$ 或者 $S=\sum_i a_i$; 而 Einstein 求和约定的写法则直接把它简化为 $S=a_i$ 。这样写的目的是突出一般项，让我们能够更快地找出和式中一些相类似的部分；以及省空间。我们再举几个例子，左边是通常写法，右边是 Einstein 求和约定：

$$c=\sum_i a_i b_i \rightarrow c=a_i b_i$$

$$c=\sum_i \sum_j \sum_k a_i b_j c_k \rightarrow c=a_i b_j c_k$$

$$c_i=a_i \sum_j \sum_k b_j c_k \rightarrow c_i=a_i b_j c_k$$

$$\mathrm{d} f=\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d} x_i \rightarrow \mathrm{d} f=\frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d} x_i$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}=\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{v}=\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

第二个与第三个之间其实并没有歧义，因为第二个的等式左边表明了与下标有关。这时候不再是哑指标而是自由指标。当然，如果有时候真的需要区分，可以在不求和的指标上做标记。

5.2 Kronecker 符号与 Levi-Civita 符号

这两个符号会用于许多向量，矩阵和高阶张量的运算。首先是 Kronecker 符号：

$$\delta_{ij}=\left\{\begin{array}{l} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{array}\right. .$$

显然这个符号是对称的，即 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ 。在这个标注下就有 $a_j=a_i \delta_{ij}$ 。在线性代数中有 Laplace 展开公式，可以记为 $\delta_{ki} \det(\boldsymbol{A})=a_{kj} A_{ij}$。(注意右边是 Einstein 求和约定) 然后是 Levi-Civita 符号：

$$\varepsilon_{ijk}=\left\{\begin{array}{l} 1,(i, j, k)\text{是偶排列} \\ -1,(i, j, k)\text{是奇排列。} \\ 0, \text{else} \end{array}\right.$$

这个符号是轮换且反对称的，也就是说 $\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{jki}=\varepsilon_{kij}, \varepsilon_{ijk}=-\varepsilon_{jik}$ 。
容易验证下面的恒等式：

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk}=\delta_{il} \delta_{jm}-\delta_{im} \delta_{jl}$$

作为应用例子，矩阵 $A=(a_{ij})_{3 \times 3}$ 的行列式为 $\det(\boldsymbol{A})=\varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$ 。你会发现这个符号其实就是一个特殊版本：对一般方阵，行列式定义式为 $\det(\boldsymbol{A})=\sum_\pi(-1)^{\tau(\pi)} \prod_{i=1}^n a_{i \pi(i)}$,($\tau(*)$ 是排列的逆序数) Levi-Civita 符号就是 $(-1)^{\tau(\pi)}$ 在 $n=3$ 时的情形。

5.3 向量代数

这里现在讨论的是三维向量。其运算现在有点乘和叉乘两种，可以记为：$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i$ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k$ 第二个式子是因为，容易验证 $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k$, 从而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\times b_j\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k$ 。也可以运用表示

$$a\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

和上面行列式的表示来理解。另外，作为第一个的特例，$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}$ 。接下来我们来推导一些向量计算恒等式，这些式子看起来也许比较难记，但是用 Einstein 求和约定
我们先计算向量的混合积：

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot\varepsilon_{jkl}b_jc_k\boldsymbol{e}_l=\delta_{il}\varepsilon_{jkl}a_ib_jc_k=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$$

最后一个等号先对 l 求了和。这是一个轮换式！所以我们得到

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

这个混合积由于具有对称性也记为 $[\boldsymbol{abc}]$ 。(不要与后面出现的 Poisson 括号混淆) 下面我们来证明关于三重叉积的恒等式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=a_i\boldsymbol{e}_i\times\varepsilon_{jkl}b_jc_k\boldsymbol{e}_l\\&=-\varepsilon_{iml}\varepsilon_{jkl}a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_m\\&=(\delta_{ik}\delta_{mj}-\delta_{ij}\delta_{mk})a_ib_jc_k\boldsymbol{e}_m\\&=a_kc_kb_j\boldsymbol{e}_j-a_jb_jc_k\boldsymbol{e}_k\\&=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

到数第二个等号的原因是 $a_kc_k=\delta_{ik}a_ic_k, b_j\boldsymbol{e}_j=\delta_{mj}b_j\boldsymbol{e}_m$, 另一个式子类推 (注意下标对应上)。
下次不记得恒等式的话，可以这样推导，比较快。最后说一下矩阵怎么表示。线性代数里都学过基本矩阵 E_{ij} , 所以一个矩阵一般也就表示为 $A=a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$ 。不过如果矩阵 $C=\boldsymbol{ab}^T$ (列向量), 怎么表示？我们可以计算出 $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T=\boldsymbol{E}_{ij}$, 从而

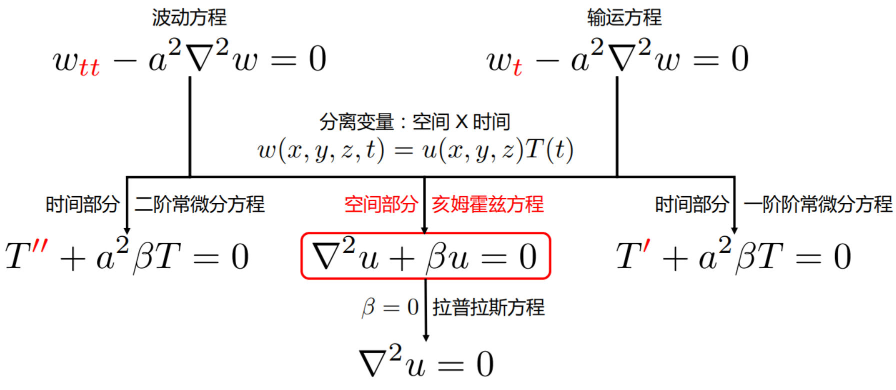
$$\boldsymbol{C}=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T=a_ib_j\boldsymbol{E}_{ij}$$

有时候我们把这个乘积中的转置去掉当成一种新运算，上面也可以直接写成

$$\boldsymbol{A}=a_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{ab}=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\ 。$$

第 6 章　数理方程（解题导向）



6.1　方程分类

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{6.1}$$

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,t) \tag{6.2}$$

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{6.3}$$

一般就考察以上三种，

6.2　方法论

- 分离变量法（三类方程均适用）
- 本征函数法（只讲了在分离变量法中处理非齐次方程）
- 行波法（只要会用它来解一维无界域波动方程）
- 积分变换法（三类方程均适用，但只要会傅里叶变换的解法，而且貌似只能解无界域上的方程）
- 格林函数法（解拉普拉斯方程，只考电像法，狄利克雷问题）
- 贝塞尔函数（好像只考递推关系？）

6.3　解题思路

首先判断类型：
波动方程:

- 一维无界域方程：行波法应该可以直接做
- 有界齐次方程：分离变量法直接求
- 有界非齐次方程：分离变量法，设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, 其中 v 表示仅由 $f(x,t)$ 引起的部分，w 表示仅由初始状态引起的部分。v 用本征函数法处理，w 直接求

- 有界方程、非齐次边界条件：分离变量法。

  1. 极坐标变换，化为齐次边界条件；

  2 作代换，化为齐次边界条件，令 u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), 使得

  $$v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, w|_{x=0} = u_1(t), w|_{x=l} = u_2(t)$$

  选取简单的 w，再解出 v 即可。若自由项 (如果有的话) 和边界条件均与 t 无关，可通过一次代换将方程和边界条件同时化为齐次的

- 无界方程：积分变换法

波动方程: 类似上文，不过没有一维无界领域；
特别注意自然边界条件：比如无穷远处取有限值（可能导致某些参数为 0）
Laplace 方程:

- 圆域上的拉普拉斯方程 : 分离变量法，注意要不要补充自然周期条件 ($u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$) 和自然边界条件 ($|u(0, \theta)| < +\infty$)

- 特殊区域：其实题目会指定你用格林函数法

6.4 方法简介

首先应该注意对称性，得到问题是关于哪几个变量的函数，有一些具有周期性或者无关的变量（如角度）就应该省去，我们主要关心的还是径向方程。
分离变量法:
形式为:（省略了求和，其实是系数与模的乘积再求和）

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

- 将解写成分离变量形式，选定合适变量，求解固有值问题得到固有值和固有函数系
- 求解其他常微分方程得到形式解，即把解在定解条件上展开
- 把定解条件代入形式解中确定形式解的系数，即把定解条件在固有函数系上展

本征函数法：属于高数和线代学习过的内容，这里不再赘述；一般遇到二次方程用到。
行波法:
对于方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

其特征方程为

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0(\text{注意 x，y 的位置，以及减号})$$

设由特征方程解得积分曲线为 $a_1x + b_1y = C_1, a_2x + b_2y = C_2$, 令 $\xi = a_1x + b_1y, \eta = a_2x + b_2y$
若 $C = D = E = F = 0$, 可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

积分变换法:
方程两端同时对 x 取傅里叶变换，代入并利用性质求解

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)] = (iw)^n \mathscr{F}[f(t)](\text{微分性})$$

$$\mathscr{F}[f(t+t_0)] = e^{iwt_0}\mathscr{F}[f(t)] \quad (\text{位移性})$$

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}(\frac{w}{a})(\text{相似性})$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)] = F_1(w)\cdot F_2(w)(\text{卷积定理})$$

格林函数法/电像法：

1. 摆出：

$$\begin{cases} \Delta G(M,M_0) = \delta(M-M_0), M\in\Omega \\ G(M,M_0)|_S = 0 \end{cases}$$

2. 确定区域 Ω 和边界 S，写出来
3. 画图，找像点，可能有多个如果 S 为平面或直线，则为几何对称点；如果 S 为球面或圆弧线，则为反演点；
4. 确定格林函数 G：

三维空间：

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi r_{M_0M}} + \frac{C}{4\pi r_{M_1M}}$$

二维空间：

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{M_0}M} + sgn(C)\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|C|}{r_{M_1M}}$$

(sgn(x) 是取符号的函数)

5. 求 $\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n_0}}$ (不用很具体)
6. 把积分表达式写出来，写积分区间

$$u(M) = -\iint_S f(M_0)\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n_0}}|_S dS$$

$$u(M) = -\int_C f(M_0)\frac{\partial G}{\partial \overrightarrow{n_0}}|_l dl$$

贝塞尔方程：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-n^2)y = 0 \tag{6.4}$$

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m}!\Gamma(n+m+1)}$$

$$Y_n(x) = \lim_{a\to n}\frac{J_a(x)\text{cos}a\pi - J_{-a}(x)}{\text{sin}a\pi}$$

n 不为整数时，$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$ 为 (6.4) 解

不管 n 是不是整数，$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$ 是 (6.4) 解

递推关系：

$$\begin{aligned} &J_0'(x) = -J_1(x) \\ &\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)] = x^nJ_{n-1}(x) \\ &\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x) \end{aligned}$$

轴对称性问题的通解：

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l + B_lr^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

6.5 典型例题

6.5.1 弦振动 + 冲量原理 + 行波法

对于密度为 ρ 的无限长弦，初始时刻静止，t = 0 时在 $x = x_0$ 点受到冲量为 I 的冲击。请利用行波法求解弦的振动

答案：波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c 是波速、T 张力、密度 ρ , $c = \sqrt{T/\rho}$。初始条件：

$$u(x,0) = 0 \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,,$$

$(x,0) = 0$ 对于所有 $x \neq x_0$ 在 $x = x_0$ 点受到的冲击表示为一个初始速度条件：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)$$

其中 $\delta(x - x_0)$ 是狄拉克函数，表示在 $x = x_0$ 点有一个集中的冲量。行波法解：

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

由于初始条件 $u(x,0) = 0$, 我们有：

$$f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = -f(x)$$

因此，

$$u(x,t) = f(x - ct) - f(x + ct)$$

接下来，我们需要考虑冲击条件。冲击导致的初始速度分布为：

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)$$

这意味着：

$$-cf'(x - ct) - cf'(x + ct) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0) \quad 在 t = 0$$

积分上式关于 x, 得到：

$$-2cf(x) = \frac{I}{\rho}H(x - x_0) + C$$

其中 $H(x - x_0)$ 是阶跃函数，C 是积分常数。由于 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 之外必须是平滑的，我们可以得出 $C = 0$。因此，我们有：

$$f(x) = -\frac{I}{2c\rho}H(x - x_0)$$

所以，弦的位移表达式为：

$$u(x,t) = -\frac{I}{2c\rho}\left[H(x - ct - x_0) - H(x + ct - x_0)\right]$$

6.5.2 球坐标系下 Laplace Eq

半径为 R 的球壳上，电势分布为 $-sin^2\theta cos^2\phi+1/3$，球壳的内外区域均无电荷，请分别给出球壳内部区域和外部区域的电势分布。

定解问题为：$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r u)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta u)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2 u=0$
边界条件为：$u(R,\theta,\phi)=-\sin^2\theta\cos^2\phi+\frac{1}{3}$, $u(r,0,\phi)$, $u(r,\pi,\phi)$ 有界。

$$u(r,\theta,0)=u(r,\theta,2\pi),\ \partial_\phi u(r,\theta,0)=\partial_\phi u(r,\theta,2\pi)$$

对于球内区域，应有 $u(0,\theta,\phi)$ 有界；对于球外区域，应有 $\lim_{r\to\infty}u(r,\theta,\phi)=0$。

$$\begin{aligned}&\text{分离变量, 设}u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi),\ \text{则有}\\&\frac{r^2R''(r)+2rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\sin^2\theta\partial_\theta^2S(\theta,\phi)+\cos\theta\sin\theta\partial_\theta S(\theta,\phi)+\partial_\phi^2S(\theta,\phi)}{\sin^2\theta S(\theta,\phi)}=\lambda\\&\text{可得方程为:}R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{\lambda}{r^2}R(r)=0\\&\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta S(\theta,\phi))+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2S(\theta,\phi)+\lambda S(\theta,\phi)=0\end{aligned}$$

根据有界和周期性条件，可得本征值为： $\lambda_l=l(l+1),\quad l\in\mathbb{N}$。对应的本征函数为 lm 阶球谐函数：

$$S_{lm}(\theta,\phi)=P_l^m(\cos\theta)\cos m\phi, m=0,1,2,\cdots,l$$

代入径向方程，可得 $R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}R(r)=0$ 径向方程的通解为： $R_l(r)=A_lr^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}$。
该定解问题的一般解为:

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(A_lr^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l^m(\cos\theta)\left(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi\right)$$

对于 $r=R$ 处的边界条件, 有:

$$\begin{aligned}&-\sin^2\theta\cos^2\phi+\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\sin^2\theta(\cos2\phi+1)+\frac{1}{3}\\&=-\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos2\phi+\frac{1}{2}\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)\end{aligned}$$

(1) 对于球内, 由于 $r=0$ 时 u 有界, 所以 $B_l=0$, 且

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}R^lP_l^m(\cos\theta)\left(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi\right)=-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)$$

所以 $R^2C_{22}=-\frac{1}{6},R^2C_{20}=\frac{1}{3}$
因此, 球内区域电势为: $u(r,\theta,\phi)=\frac{r^2}{R^2}\left(-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)\right)$
(2) 对于球外, 由于 $r\to\infty$ 时 u, 所以 $A_l=0$, 且

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{R^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)\left(C_{lm}\cos m\phi+D_{lm}\sin m\phi\right)=-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)$$

所以 $\frac{C_{22}}{R^3}=-\frac{1}{6},\frac{C_{20}}{R^3}=\frac{1}{3}$ 因此, 球内区域电势为: $u(r,\theta,\phi)=\frac{R^3}{r^3}\left(-\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos2\phi+\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)\right)$

6.5.3 柱坐标系下 Bessel Eq.

考虑一个半径为 a, 高为 h 的圆柱体。圆柱侧面的温度恒为 0，上下底面绝热。初始时刻圆柱体整体温度为 u_0, 请计算柱体内部温度分布随时间的变化。

参考解答: 问题为轴对称, 方程与解和 ϕ 无关。
定解问题为:

$$\partial_t u(r,z,t)-\kappa\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u(r,z,t)\right)+\partial_z^2 u(r,z,t)\right]=0$$

边界条件为: $\partial_z u(r,0,t)=\partial_z u(r,h,t)=0, u(a,z,t)=0, u(0,z,t)$ 有界。
初始条件为: $u(r,z,0)=u_0$ 。同时应有 $u(r,z,\infty)$ 有界。
设 $u(r,z,t)=R(r)Z(z)T(t)$, 则有

$$\frac{T'(t)}{\kappa T(t)}=\frac{1}{rR(r)}\frac{d\left(rR'(r)\right)}{dr}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

分离变量, 可得: $R''+\frac{1}{r}R'+k^2R=0, Z''+m^2Z=0, T'+\lambda\kappa T=0$ 。其中 $\lambda=k^2+m^2$, 并有: $R(a)=Z'(0)=Z'(h)=0, R(0)$ 有界。
径向解为: $R(r)=J_0\left(k_i r\right)$, 其中 $k_i=\frac{\mu_i}{a}, \mu_i$ 为 $J_0(x)$ 的第 i 个非零的零点。
纵向解为: $Z(z)=A_n\sin m_n z+B_n\cos m_n z$,
带入边界条件, 可得: $m_nA_n=0, m_nA_n\cos m_nh-m_nB_n\sin m_nh=0$,
所以

$$A_n=0, m_nh=n\pi, Z(z)=\cos\frac{n\pi}{h}z, n\in\mathbb{N}$$

因此 $\lambda_{in}=k_i^2+m_n^2=\frac{\mu_i^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{h^2}$, 且 $T_{in}(t)=e^{-\lambda_{in}\kappa t}$
故一般解为:

$$u(r,z,t)=\sum_{in}A_{in}J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\cos\frac{n\pi z}{h}e^{-\lambda_{in}\kappa t}$$

代入初始条件, 可得: $u_0=\sum_{in}A_{in}J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\cos\frac{n\pi z}{h}$ 。
根据正交条件:

$$\int_0^a J_0\left(k_i r\right)J_0\left(k_j r\right)rdr=\frac{a^2}{2}J_1^2\left(k_i a\right)\delta_{ij}$$

以及

$$\int_0^h\cos\frac{n\pi z}{h}\cos\frac{m\pi z}{h}dz=\delta_{mn}\begin{cases}h, n=0\\ \frac{h}{2}, n\neq 0\end{cases}$$

对左侧积分, 可得:

$$\int_0^a\int_0^h J_0\left(k_i r\right)\cos\frac{n\pi z}{h}rdrdz=h\delta_{n0}\frac{a}{k_i}J_1\left(k_i a\right)=\frac{ha^2}{\mu_i}J_1\left(\mu_i\right)$$

所以系数为: $A_{in}=\frac{2u_0}{\mu_i J_1(\mu_i)}\delta_{n0}$, 解为:

$$u(r,z,t)=\sum\frac{2u_0}{\mu_i J_1\left(\mu_i\right)}J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)e^{-\frac{\mu_i^2\kappa}{a^2}t}$$

P.S. 主要参考课程 PPT+ 老师讲义 + 知乎笔记；若有疏漏请忽略，联系作者 2540181946@qq.com
另：友情链接大佬笔记：Click here to hair loss